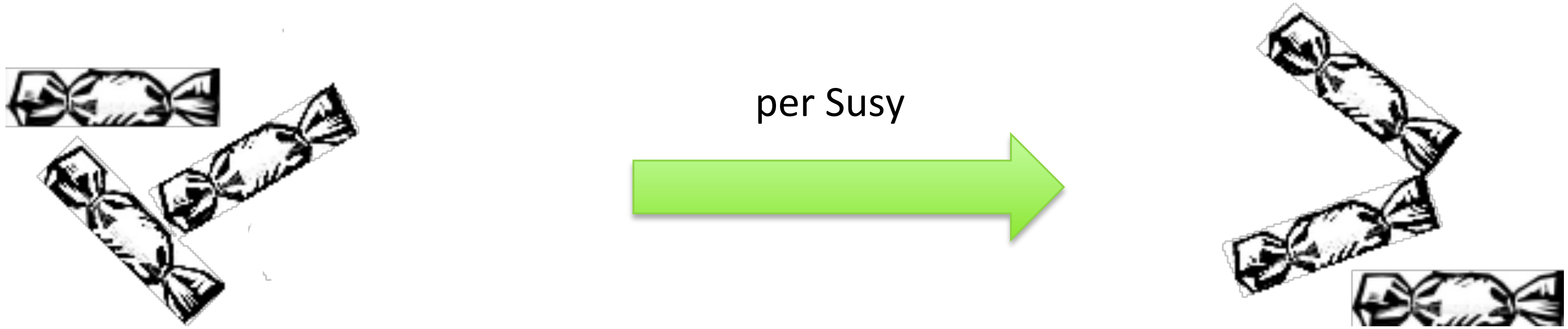
Attività disordinate sulle frazioni

Gianfranco Arrigo, 18 gennaio 2012

La frazione come parte di un insieme

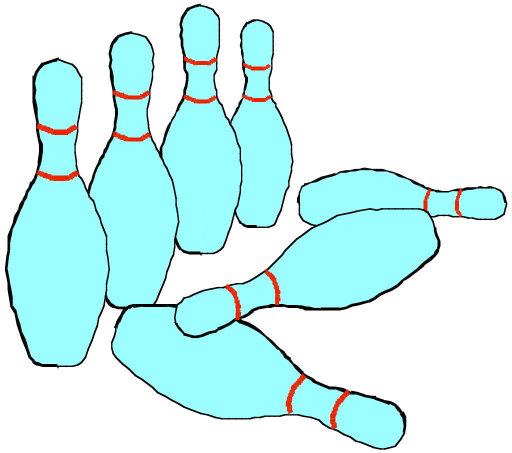
Il caso discreto



Quali di queste affermazioni sono corrette?

- ❑ A Susy ho dato 3 caramelle su 6
- ❑ A Susy ho dato 3 caramelle su 3
- ❑ A Susy ho dato la metà delle caramelle
- ❑ A Susy ho dato un terzo delle caramelle
- ❑ A Susy ho dato 1/2 delle caramelle
- ❑ A Susy ho dato 1/6 delle caramelle
- ❑ A Susy ho dato 3/3 delle caramelle
- ❑ A Susy ho dato 3/6 delle caramelle

Il caso discreto



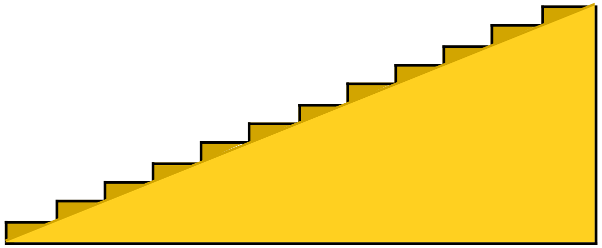
Che frazione rappresentano i birilli abbattuti?

- ❑ 3/4
- ❑ 3/7
- ❑ 4/3
- ❑ 4/7
- ❑ 1/2
- ❑ 1/3

Quanti birilli dovrei abbattere per fare in modo che ne restino in piedi la metà?

5 maschietti e 5 femminucce partecipano a una festa di compleanno. 5 di loro devono servire le pietanze.
È possibile scegliere i 5 che devono servire, senza creare ingiustizie tra maschi e femmine?
Come potresti ovviare all’inconveniente?

Il caso discreto



Carlo deve salire fino in cima a una scala di 12 scalini.
Giunto al quarto scalino, si ferma e si chiede:

- ❑ Che frazione dell'intera scala ho percorso?
- ❑ Quale frazione mi resta da percorrere?
- ❑ Su quale scalino mi trovo se ho percorso metà della scala?
- ❑ Su quale scalino mi trovo se ho percorso 1/6 della scala?
- ❑ Su quale scalino mi trovo se ho percorso 1/5 della scala?
- ❑ Quando arrivo all'ottavo scalino, che frazione della scala ho percorso?

Anche Tania sta salendo una scala.
Giunta al settimo scalino, si ferma e dice: «Sono arrivata a 1/4 della scala.

- ❑ Quanti gradini ha la scala?
- ❑ A quali gradini corrisponde una frazione esatta del percorso fatto?

La frazione come parte di un insieme discreto: riflessioni

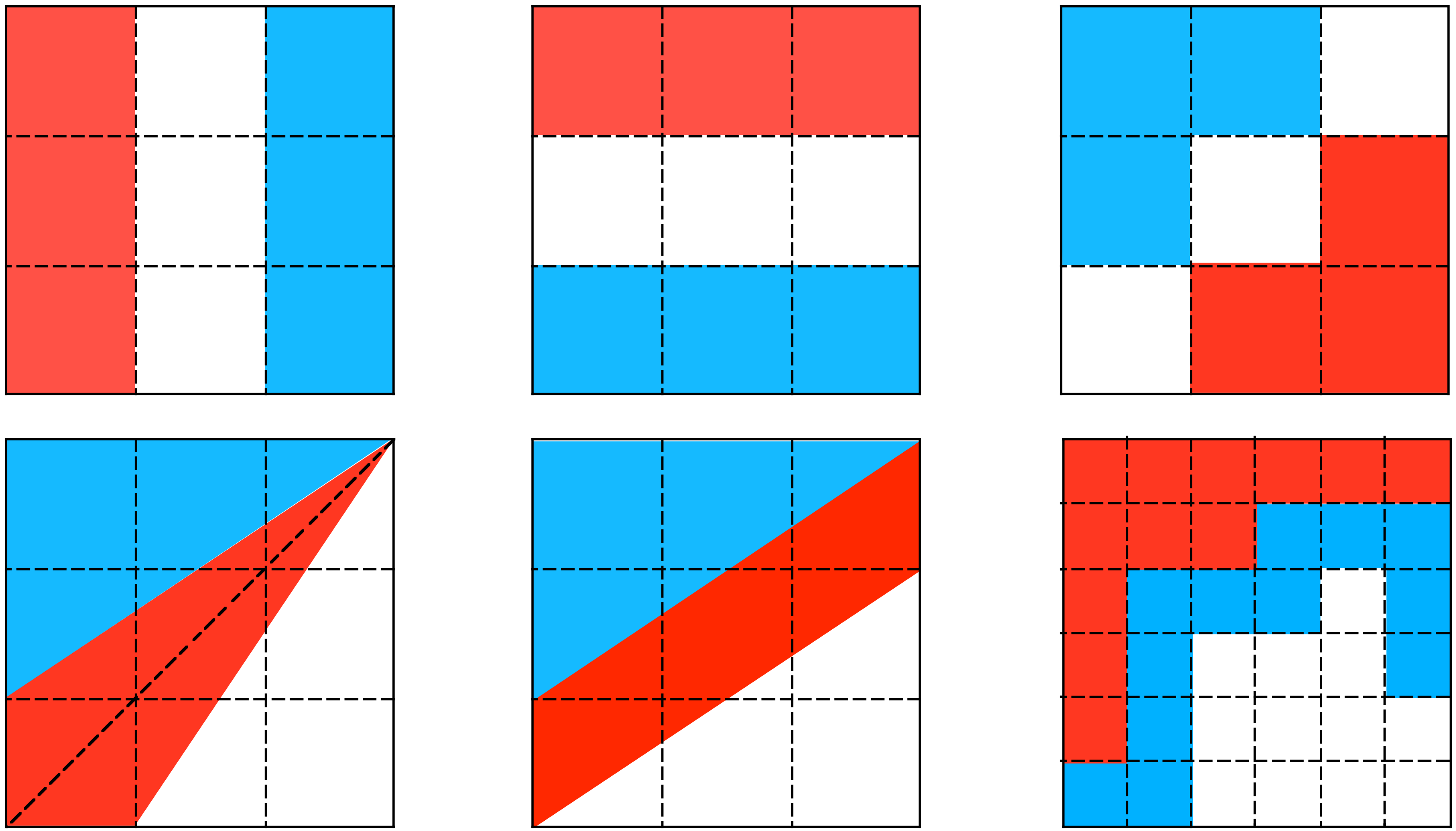
Data una situazione concreta, riferita a un insieme discreto (“uno-tutto”) di n elementi, la frazione a/b ha senso solo se b è divisore di n.

Il numeratore a non può essere maggiore di b.

Se da un insieme I di b elementi ne estraggo a, la parte estratta rappresenta a/b dell’insieme I («a biesimi di I»), mentre la parte rimanente rappresenta (b–a)/b dell’insieme I.

Il caso continuo: ripartizioni equiestese

Diverse trisezioni di un quadrato



In ogni suddivisione, le parti monocolore rappresentano ciascuna 1/3 del quadrato, mentre una figura ottenuta unendo due parti di colore diverso ne rappresenta i 2/3

Il caso continuo: le lunghezze

Barbara e la sua famiglia si stanno recando al mare. Conoscendo la distanza da percorrere, è possibile determinare il punto corrispondente a:

- ❑ metà del viaggio?
- ❑ 1/5 del viaggio?
- ❑ 1/7 del viaggio?
- ❑ 3/10 del viaggio?
- ❑ 0/19 del viaggio?
- ❑ 32/32 del viaggio?
- ❑ 71/1000 del viaggio?
- ❑ 3/2 del viaggio?

Il caso continuo: le lunghezze

Supposto che l'intero percorso sia di 210 km, e che si voglia determinare il punto corrispondente alla frazione a/b:

- ❑ vi sono valori che b non potrebbe assumere in questo problema?
- ❑ vi sono valori "scomodi" per b?
- ❑ come faresti per trovare i 10/21 del percorso?
- ❑ come faresti per trovare i 18/19 del percorso?

$$\frac{10}{21} \text{ di } 210 \text{ km sono } 100.000 \text{ km}$$

comodo

$$\frac{18}{19} \text{ di } 210 \text{ km sono } 198.947 \text{ km}$$

scomodo e approssimato

Il caso continuo: le lunghezze

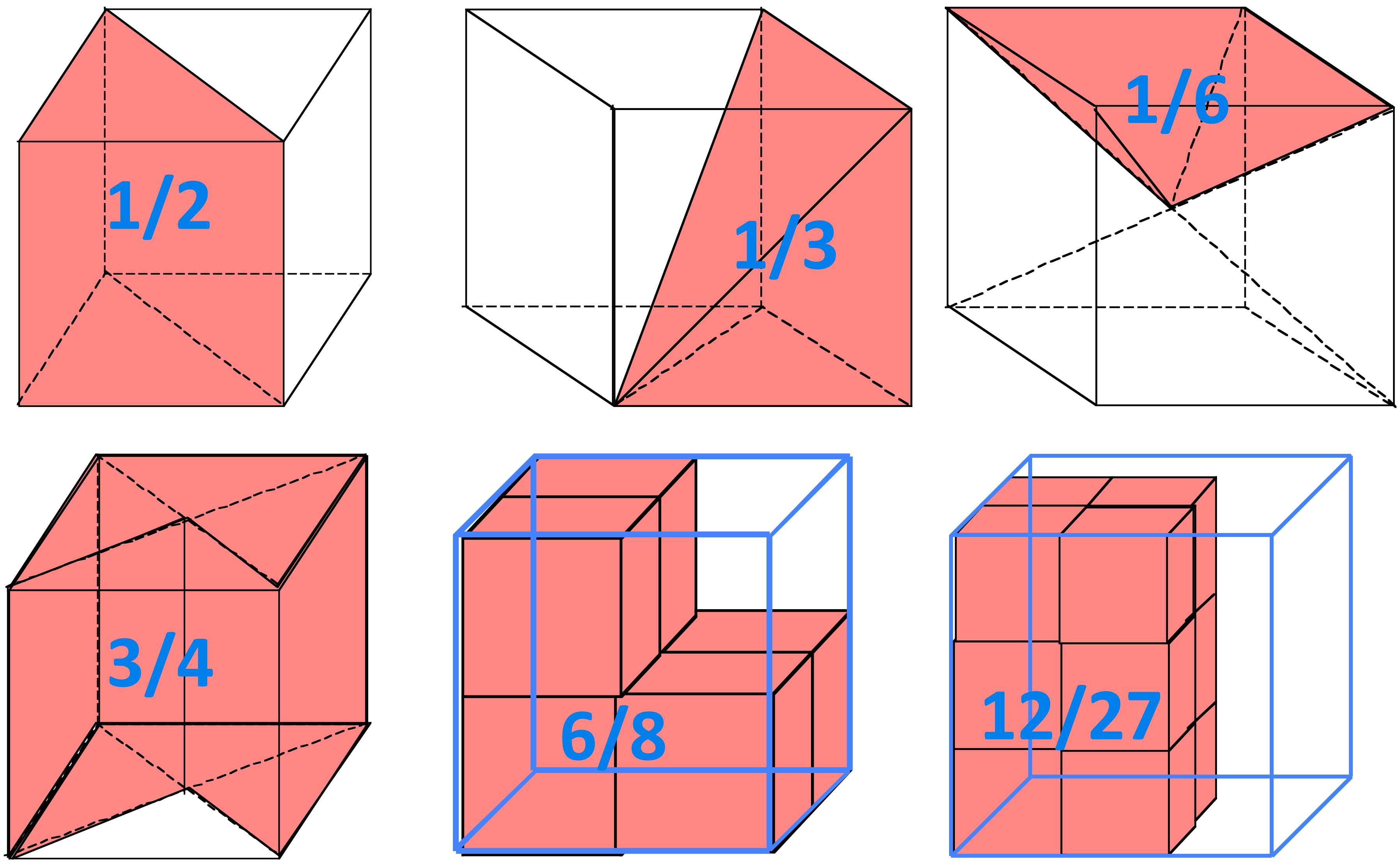
Elenco dei denominatori “comodi” relativi al numero 210:

sono i suoi divisori.

1	$\longleftrightarrow$	210
2	$\longleftrightarrow$	105
3	$\longleftrightarrow$	70
5	$\longleftrightarrow$	42
6	$\longleftrightarrow$	35
7	$\longleftrightarrow$	30
10	$\longleftrightarrow$	21
14	$\longleftrightarrow$	15

8 su 210 possibilità: circa il 3,8 %

Il caso continuo: parti di un cubo



La frazione come parte di un insieme continuo: riflessioni

Nel caso di parti di figure geometriche piane o tridimensionali è importante specificare rispetto a quale loro caratteristica misurabile si considerano le frazioni. Di solito ci si riferisce all'area delle figure piane e al volume delle figure tridimensionali.

Se ci si riferisce all'area o al volume, non deve essere necessariamente rispettata la congruenza geometrica.

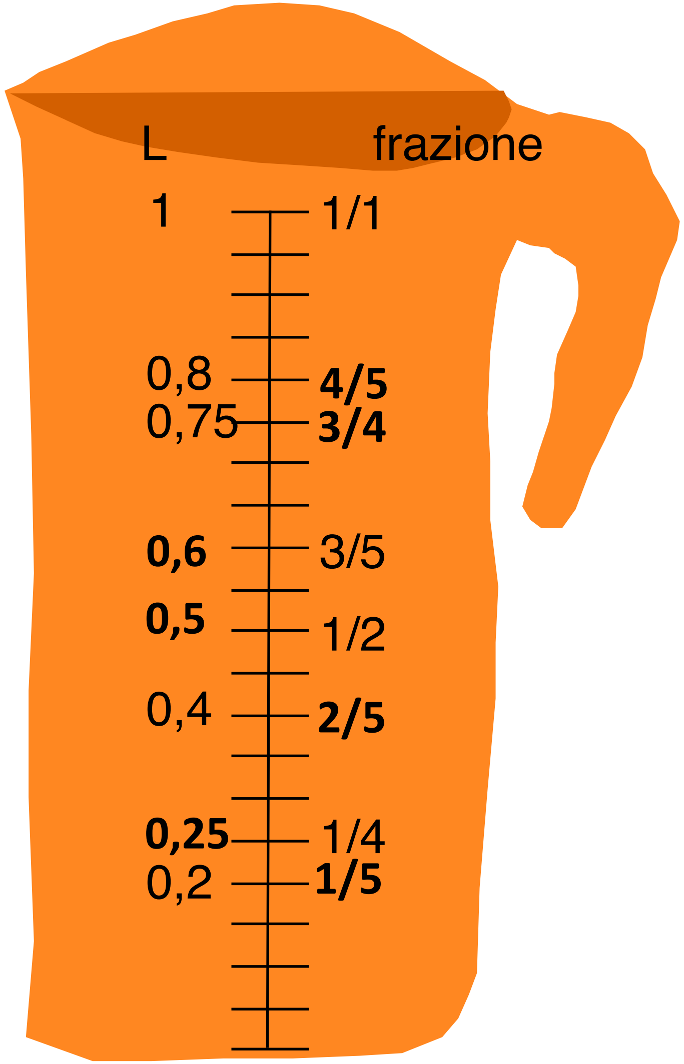
Il numeratore a non può essere maggiore di b.

In teoria, è possibile determinare qualsiasi frazione a/b (a≤b, a, b naturali) di un insieme continuo. Tuttavia non è sempre possibile determinare con esattezza la parte corrispondente alla frazione a/b. In questi casi ci si accontenta di un'approssimazione.

La frazione come misura

Le capacità

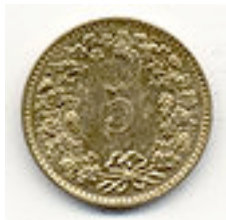
Il misurino: completa in modo che a ogni numero corrisponda una frazione e viceversa



Le monete

Sulla moneta svizzera da 50 centesimi si legge: ½ Fr.

Completa in modo che di ogni moneta sia indicato il suo valore mediante una o più frazioni di franco



20/100	10/100	5/100	1/100
1/5	1/10	1/20	…

La frazione come misura: riflessioni

Questo aspetto è più pratico che matematico.
Basta tenere presente che:

- la misura è un numero reale positivo (caso particolare: razionale)
- una frazione rappresenta anche un numero razionale.

Dunque la frazione può anche essere usata per indicare una misura.

Nella vita corrente, le espressioni:
«mezzo chilo», «tre quarti d'ora», «un quinto di vino», ecc. sono molto usate, ma, stranamente, nessuno dice
«due terzi di ora», «un quinto di chilo», «un terzo di litro».
Al loro posto si usano «quaranta minuti», «due etti», «trentatre centilitri».

La frazione come rapporto

La frazione come rapporto

La tastiera del pianoforte

Rapporto tasti neri/tasti bianchi:

una ottava

5/7

due ottave

10/14

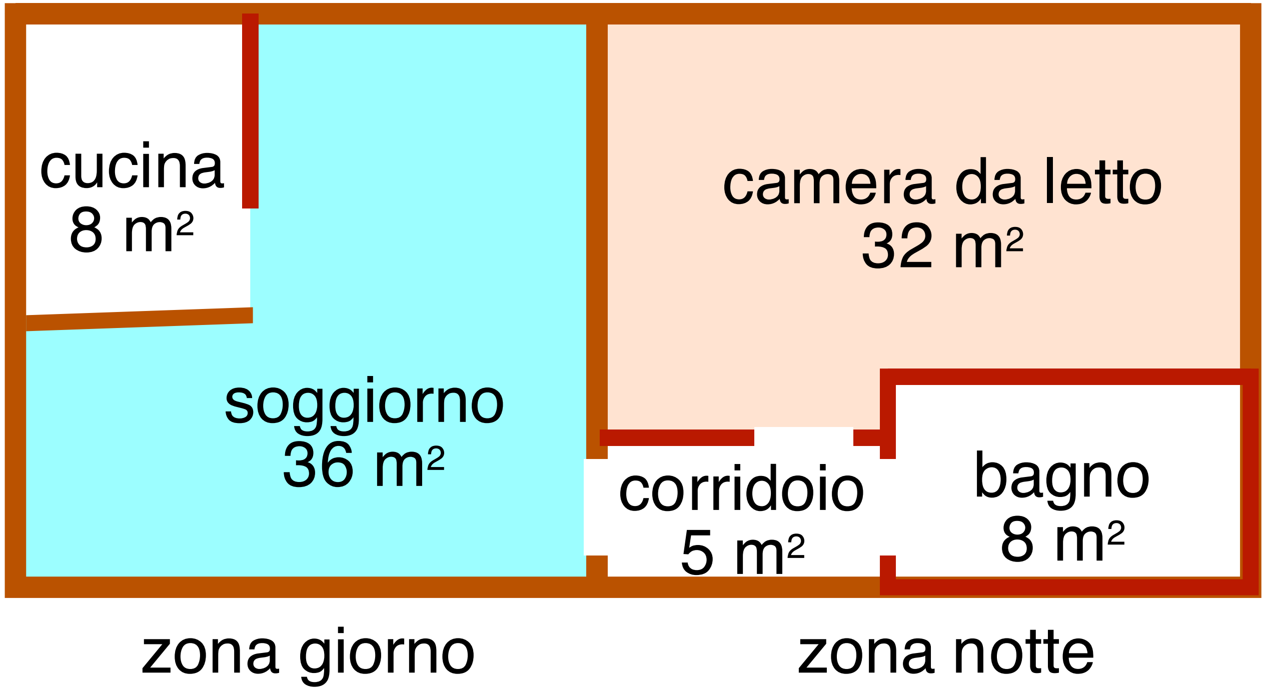
tre ottave

15/21

Che cos'hanno in comune
le tre frazioni?

La frazione come rapporto

Architettura: rapporti fra spazi in un appartamento



Rapporti fra aree:

giorno/notte: 44/45

cucina/soggiorno: 8/36

cucina/bagno: 8/8

soggiorno/camera: 36/32

corridoio/appartamento: 5/89

La frazione come probabilità

Caso discreto

Lancio di due dadi e somma dei punteggi

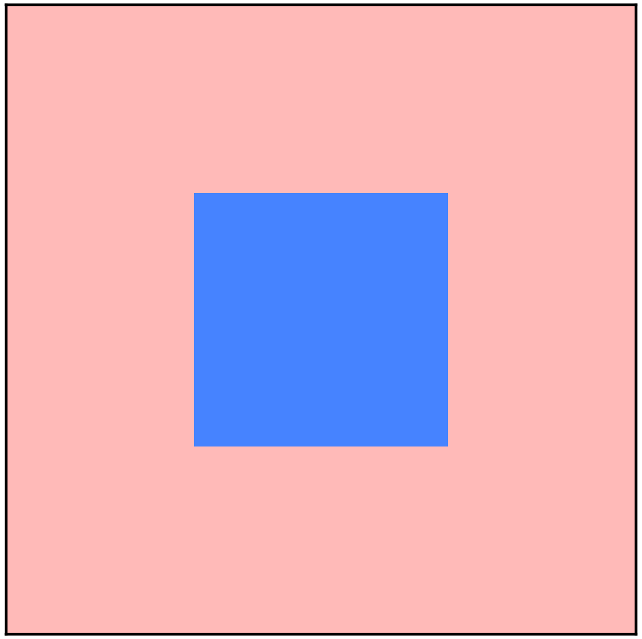
	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Distribuzione di probabilità:

Risultati:	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Probabilità:	**1/36**	**2/36**	**3/36**	**4/36**	**5/36**	**6/36**	**5/36**	**4/36**	**3/36**	**2/36**	**1/36**

Caso continuo: la probabilità come rapporto tra aree

Tiro a segno



Il lato del quadrato azzurro (centro del bersaglio) è 40 cm, mentre quello del bersaglio è 1 m

Un tiratore inesperto può colpire il bersaglio in qualsiasi punto.
Non si contano i tiri finiti fuori bersaglio.

Qual è la probabilità che un tiratore inesperto faccia centro al primo tiro?

La probabilità è data dal rapporto tra le due aree, che calcoliamo in m^2:
Area azzurra: $0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16$
Area rosa: $1 \cdot 1 = 1$

Probabilità:
$0{,}16 : 1 = 0{,}16 = 16/100 =$
$= 4/25 = 16\%$

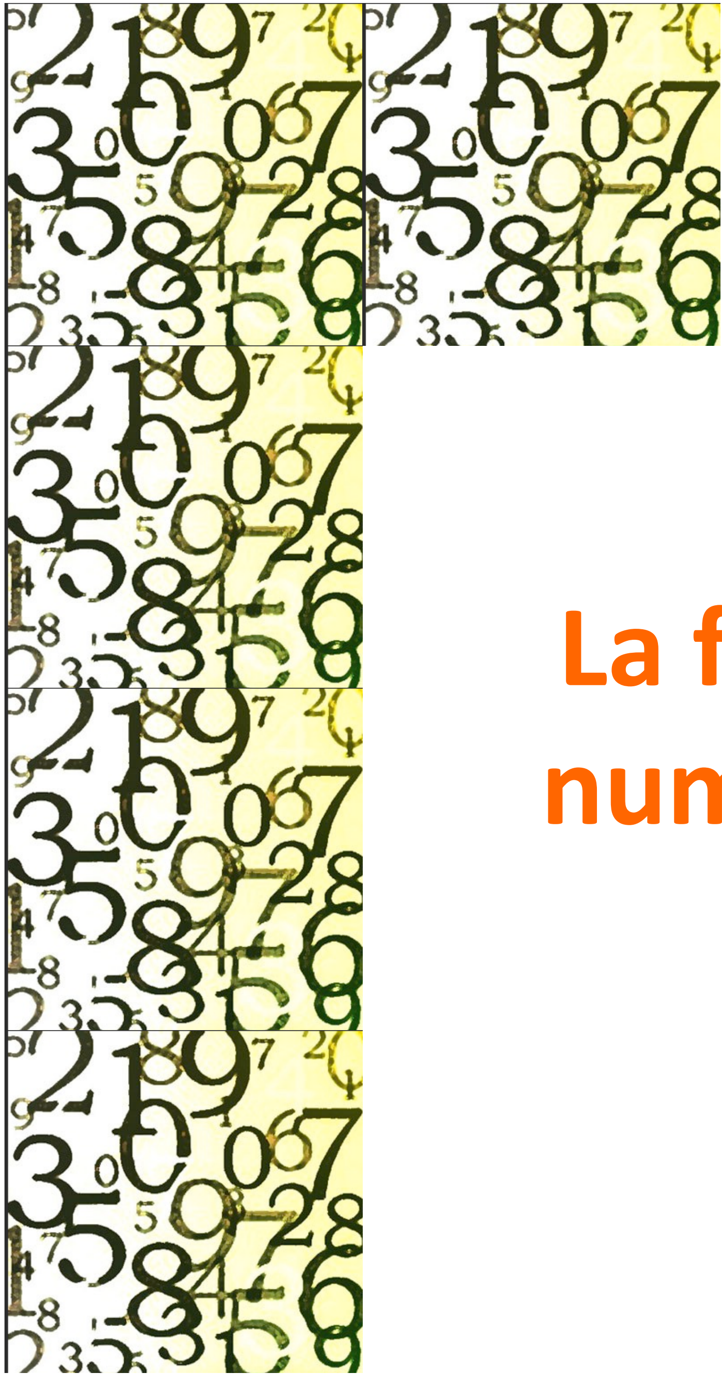
La frazione come misura di probabilità: riflessioni

La probabilità è una misura particolare perché i suoi valori sono compresi tra 0 e 1.

Esprime la misura della verificabilità di un evento.
L'evento impossibile ha probabilità 0 (di verificarsi), mentre l'evento sicuro ha probabilità 1.

La misura può essere ottenuta mediante procedimenti deterministici (probabilità oggettiva), oppure può essere stimata in funzione del grado di fiducia che l'individuo accorda al verificarsi dell'evento (probabilità soggettiva).

La scuola dell'obbligo ha anche il dovere di educare al concetto di probabilità matematica e di correggere le diverse misconcezioni che gli allievi si formano nella vita quotidiana.



La frazione come numero razionale

Ancora le monete

Sulla moneta svizzera da 50 centesimi si legge: ½ Fr,
ma 50 centesimi sono 0,5 franchi.

Diciamo che alla frazione 1/2 corrisponde il numero 0,5.

Sotto a ogni moneta, trovi le frazioni di franco. Sotto di esse scrivi i numeri corrispondenti.

				
50/100 1/2	20/100 1/5	10/100 1/10	5/100 1/20	1/100 …
0,5	**0,2**	**0,1**	**0,05**	**0,01**

Ancora le monete

Si possono considerare anche somme più grandi di un franco.


1,50 Fr è uguale a tre volte 50 cent, cioè a 3 volte ½ Fr, cioè a 3/2 Fr

Al numero 1,5 corrisponde la frazione 3/2

2,20 Fr è uguale a 200/100 + 20/100 centesimi , cioè a 220/100

Al numero 2,2 corrisponde la frazione 220/100 [ma anche 22/10 ; 11/5 ; …]

Ancora le monete

Altro esempio:

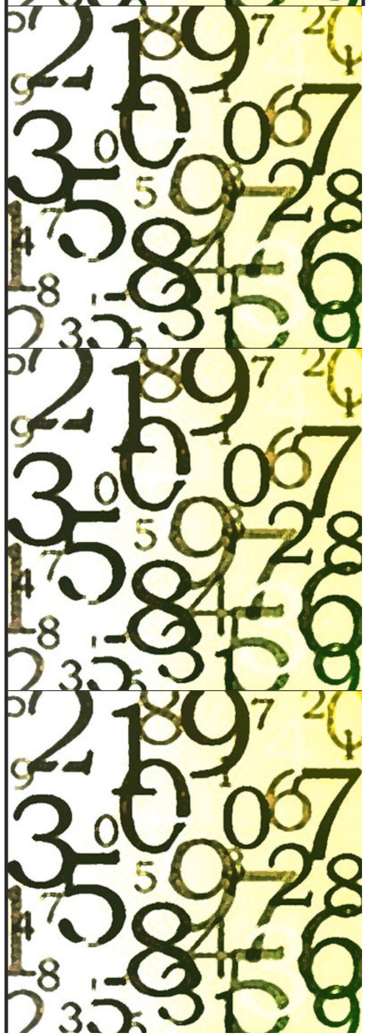
3,65 Fr è uguale a
300/100 + 60/100 + 5/100
cioè a
365/100

Al numero 3,65 corrisponde la frazione 365/100 [e tutte le equivalenti]

Riassunto

Frazione	Numero
1/2	0,5
1/4	0,25
3/4	0,75
1/5	0,2
2/5	0,4
3/5	0,6
4/5	0,8
5/10	0,5
8/10	0,8
1/8	0,125
6/8	0,75

Frazione	Numero
3/2	1,5
1/3	0,33…
2/3	0,66…
4/3	1,33…
5/2	2,5
5/4	1,25
10/4	2,5
6/5	1,2
15/10	1,5
13/100	0,13
9/1000	0,009



La frazione come operatore su grandezze

Saldi 1

Un paio di jeans costavano 155 franchi.
Durante il periodo dei saldi il negozio applica uno sconto del 30%.

- A quanto ammonta lo sconto in franchi?
- Quanto li pagherei in definitiva?

155 franchi corrispondono al 100%.

L’1% corrisponde a: 155 : 100 = 1,55 (Fr)

Il 30% corrisponde a 1,55 × 30 = 46,50 (Fr)

Ho pagato 155 – 46,50 = 108,50 (Fr)

Saldi 2

In un altro negozio che applica il 45 % di sconto, un paio di jeans, alla fine, li porti via per 99 Fr.
Quanto costavano all'inizio?

99 franchi corrispondono al (100–45) %, cioè al 55 %

L'1 % corrisponde a 99 : 55 = 1,80 (Fr)

Il 100 % corrisponde a 1,80 × 100 = 180 (Fr)

Il prezzo non scontato è quindi 180 Fr

Saldi 3

Un terzo negozio espone in vetrina il seguente cartello:

75 franchi invece di 120 sono la bellezza di 45 franchi di sconto.

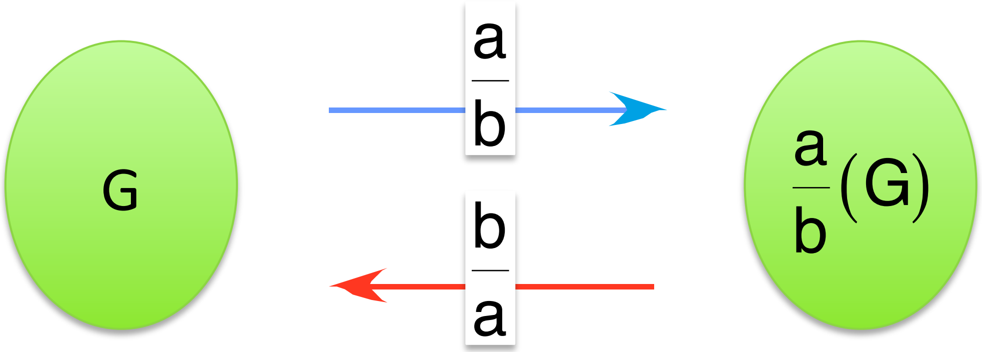
Qual è la frazione che applica il negozio al prezzo iniziale?

45 franchi su 120, cioè 45/120 = 9/24 = 9 : 24 = 0,375 = 37,5 %

La frazione come operatore su grandezze: riflessione

È il caso più completo, perché riassume tutti i casi elencati.
Il concetto, di solito, è un cavallo di battaglia dei primi anni della scuola media.

Schematicamente:



Purtroppo, in certi casi, la scuola media non riesce a cancellare le misconcezioni accumulate. La speranza è che, mettendo gli allievi di fronte ad attività mirate e semplici già nella scuola elementare, si possano migliorare le cose.

Fine

gianfranco.arrigo@span.ch